DT/ SCIENCES ET TECHNIQUES INDUSTRIELLES

EPREUVES THEORIQUES

EPREUVE : MATHEMATIQUES GENERALES (toutes spécialités)
DUREE : 3 H
COEF : 3

SUJET

Exercice 1

Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J), on donne les points A et B d'affixes respectives a =1, b = 2i et l'équation (E) : $\frac{1-\bar{z}}{1+2i} = -i$.

1- i) Déterminez les coordonnées du point C d'affixe c solution de (E) dans $\mathbb{C}$.
   ii) Vérifiez que l'équation (E) équivaut à b – 1 = – i(z –1)
   iii) Déduisez-en que C est l'image de B par une similitude plane directe de centre A dont on précisera l'écriture complexe, l'angle et le rapport.
2- i) Placez les points A, B et C.
   ii) Démontrez que [BC] est un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC.
   iii Déterminez l'affixe d du point D tel que ACDB soit un carré indirect.
3- Soit G un point d'affixe g = $\frac{b|a|+a|b|}{|a|+|b|}$.
   i) Déterminez les coordonnées de G.
   ii) Calculez $\frac{g^2}{ab}$.
   iii) Déduisez-en que le vecteur $\overrightarrow{OG}$ est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.

Exercice 2

Soit l'équation différentielle $(E): y' - \frac{ln3}{2}y = d$. Une solution de (E) est la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + e^{xln\sqrt{3}}$.

1- a) Calculez $f'(x)$.
   b) Déduisez-en la valeur du nombre réel d.
2- Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 2x + 3$.

Problème

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J), (C) est la courbe représentative de la fonction f définie sur I = $]0,+\infty[$ par f(x) = $\frac{1}{x^2}(x + lnx)$.

Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ $par:\ h(x) = -x + 1 - 2\,lnx$.

1- a) Calculez les limites de h aux bornes de I.
   b) Dressez le tableau des variations de h.
2- Calculez h(1) et en déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.
3- a) Calculez les limites de f aux bornes de I.

(Page suivante)

b) Etudiez le sens de variation de f.

c) Dressez le tableau des variations de f.

4- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à $]0, +\infty[$ et que $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$.

5- Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$.

a) Démontrez que g réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

On désigne par g^{-1} la bijection réciproque de g.

b) Résolvez dans J l'équation $g^{-1}(x) = e$.

c) Calculez $(g^{-1})'(e^{-2} + e^{-1})$.

6- Tracez la courbe (C) et la courbe ($\mathcal{T}$) de g^{-1} dans le repère (O ; I ; J).

BONNE CHANCE !